**KVANTITATIVNE METODE U GRAĐEVINSKOM MENADŽMENTU**

predavanja 2017/18

**RASPODJELE DISKRETNIH PROMJENLJIVIH**

1. **Binomna raspodjela**
2. **Puasonova raspodjela**

**V5**

**Zadatak 1.**

U proizvodnji prefabrikovanih betonskih ivičnjaka nalazi se 6 % neispravnih.

**a) Ako ispitujemo uzorak od 5 proizvoda, kolika je vjerovatnoća da se među njima nađu tri neispravna proizvoda?**

b) Koliko se može očekivati neispravnih proizvoda u uzorku od 5?

**c**)Koliki treba da je uzorak da vjerovatnoća pojave najmanje jednog neispravnog proizvoda u uzorku bude najmanje 0,01?

**RJEŠENJE**

X- slučajna promjenljiva= broj neispravnih proizvoda u uzorku od 5; Xϵ={0,1,2,3,4,5}

n- broj elemenata =5

p=6%=0,06

X~B(5;0,06),

**a) kolika je vjerovatnoća da se među 5 proizvoda iz uzorka nađu tri neispravna proizvoda**

$$\boldsymbol{p(3)=P(X=3)=\binom{n}{x}\cdot p^x\cdot q^{n-x}=\binom{5}{3}\cdot 0,06^3\cdot 0,94^{5-3}=0,002}$$

Mogli smo sračunati preko rekurentne formule:

$$p(x)=\frac{n-x+1}{x}\cdot\frac{p}{q}\cdot p(x-1)$$

$$\boldsymbol{p(0)}=P(X=0)=\binom{n}{x}\cdot p^x\cdot q^{n-x}=\binom{5}{0}\cdot 0,06^0\cdot 0,94^5=0,94^5=0,734$$

$$\boldsymbol{p(1)}=\frac{5-1+1}{1}\cdot\frac{p}{q}\cdot p(0)=\frac{5}{1}\cdot\frac{0,06}{0,94}\cdot 0,734=0,234$$

$$\boldsymbol{p(2)}=\frac{5-2+1}{2}\cdot\frac{p}{q}\cdot p(1)=\frac{4}{2}\cdot\frac{0,06}{0,94}\cdot 0,234=0,030$$

$$\boldsymbol{p(3)}=\frac{5-3+1}{3}\cdot\frac{p}{q}\cdot p(2)=\frac{3}{3}\cdot\frac{0,06}{0,94}\cdot 0,234=0,002$$

**Zadatak 1. - nastavak**

U proizvodnji prefabrikovanih betonskih ivičnjaka nalazi se 6 % neispravnih.

a) Ako ispitujemo uzorak od 5 proizvoda, kolika je vjerovatnoća da se među njima nađu tri neispravna proizvoda?

b) **Koliko se može očekivati neispravnih proizvoda u uzorku od 5?**

c)**Koliki treba da je uzorak da vjerovatnoća pojave najmanje jednog neispravnog proizvoda u uzorku bude najmanje 0,1?**

__RJEŠENJE__

**b) Koliko se može očekivati neispravnih proizvoda u uzorku od 5?**

treba naći matematičko očekivanje:

$$M(X) = n \cdot p = 5 \cdot 0{,}06 = 0{,}312$$

**b)Koliki treba da je uzorak da vjerovatnoća pojave najmanje jednog neispravnog proizvoda u uzorku bude najmanje 0,1?**

Treba odrediti ***n***, tako da ***p(X≥1)≥0,01***

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) \geq 0{,}1$$

$$\boldsymbol{p(0)} = P(X = 0) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{x-1} = \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot q^{n-0} = 1 \cdot 1 \cdot q^n$$

$$1 - q^n \geq 0{,}1$$

$$0{,}94^n \leq 1 - 0{,}1$$

$$\log 0{,}94^n \leq \log 0{,}90$$

$$n \cdot \log 0{,}94 \leq \log 0{,}80 \Rightarrow n \geq \frac{\log 0{,}90}{\log 0{,}94} \geq 1{,}703$$

**Zadatak 2**
Uzorci od po 8 proizvoda formirani su na slučajan način iz velike partije u kojoj je 20% neispravnih proizvoda. Naći: a) očekivani broj neispravnih proizvoda u svakom od uzoraka b) vjerovatnoću da se u uzorku pojavi više od očekivanog broja škartova; c) za 100 uzoraka po 8 proizvoda sračunati broj uzoraka u kojima se očekuju najviše dva neispravna proizvoda

**RJEŠENJE**

X- slučajna promjenljiva= broj neispravnih proizvoda u uzorku od 8; X∊={0,1,2,3,4,5,6,7,8}

n- broj elemenata =8

p=20%=0,2

X~B(8;0,2),

**a) očekivani broj neispravnih proizvoda u uzorku od 8?**

treba naći matematičko očekivanje:

$$M(X) = n \cdot p = 8 \cdot 0{,}2 = 1{,}6$$

**b) naći vjerovatnoću da se u uzorku pojavi manje od očekivanog broja neispravnih proizvoda**
(manje od onog koliko je sračunato pod a))

Treba odrediti ***p(X<1,6)=p(X=0)+p(X=1)***

$$p(x) = \frac{n-x+1}{x} \cdot \frac{p}{q} \cdot p(x-1)$$

$$\boldsymbol{p(0)} = P(X=0) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = q^8 = 0{,}8^8 = 0{,}1678$$

$$\boldsymbol{p(1)} = \frac{8-1+1}{1} \cdot \frac{p}{q} \cdot p(0) = \frac{8}{1} \cdot \frac{0{,}2}{0{,}8} \cdot 0{,}1678 = 0{,}3355$$

$$\boldsymbol{p(X < 1{,}6)} = p(X=0) + p(X=1) = 0{,}1678 + 0{,}3355 = 0{,}50334$$

**Zadatak 2- nastavak**

Uzorci od po 8 proizvoda formirani su na slučajan način iz velike partije u kojoj je 20% neispravnih proizvoda. Naći: a) očekivani broj neispravnih proizvoda u svakom od uzoraka b) vjerovatnoću da se u uzorku pojavi više od očekivanog broja škartova; c**) za 100 uzoraka po 8 proizvoda sračunati broj uzoraka u kojima se očekuju najviše dva neispravna proizvoda**

**RJEŠENJE**

c) **za 100 uzoraka po 8 proizvoda sračunati broj uzoraka u kojima se očekuju najviše 2 neispravna proizvoda=** treba naći vjerovatnoću da se u jednom uzorku nađu najviše 2 proizvoda, pa tu vjerovatnoću pomnožiti sa 100 uzoraka, tj.:

$$p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2),$$

u prethodnom dijelu zadatka sracunato p(0) i p(1)

$$\boldsymbol{p(2)} = \frac{8 - 2 + 1}{2} \cdot \frac{p}{q} \cdot p(1) = \frac{7}{2} \cdot \frac{0{,}2}{0{,}8} \cdot 0{,}3355 = 0{,}2936$$

$$p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = 0{,}1678 + 0{,}3355 + 0{,}2936 = 0{,}7969$$

Ukupno se u 0,7969∗100=79,69≈80 uzoraka očekuje pojava najviše 2 neispravna proizvoda

**Zadatak 3**

Složeni mehanizam sastoji se od 2000 podjednako pouzdanih elemenata. Vjerovatnoća zastoja za svaki dio iznosi 0,0005. a) Koliko se može očekivati elemenata koji su otkazali? b)Naći vjerovatnoću da mehanizam otkaže u radu, ako zastoj mehanizma zastane kada otkaže bar jedan element.

**RJEŠENJE**

X- slučajna promjenljiva= broj elemenata koji su otkazali od 2000; X∊={0,1,2,3...2000}

n- broj elemenata =2000 vjerovatnoća otkaza 1 elementa : p=0,0005 ***n→∞*** i ***p→0***

X~Po(λ), λ=n·p=2000*0,0005=1

$$P_\lambda(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

**a) očekivani broj elemenata koji su otkazali**

treba naći matematičko očekivanje:

$$M(X) = \lambda = 1$$

**b) naći vjerovatnoću da mehanizam otkaže u radu, ako zastoj mehanizma zastane kada otkaže bar jedan element**

Treba odrediti ***p(X≥1)***

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0)$$

$$P_\lambda(0) = \frac{\lambda^0 \cdot e^{-\lambda}}{0!} = \frac{1 \cdot e^{-1}}{1} = \frac{1}{e} = 1/2{,}7183 = 0{,}368$$

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0{,}368 = 0{,}632$$

**Zadatak 4**
Partija proizvoda sadrži 5% škartova. Uzima se slučajan uzorak od n=60 proizvoda. Izračunati vjerovatnoću da se u uzorku ne nadje ni jedan škart.

**<u>RJEŠENJE</u>**

X- slučajna promjenljiva= broj škartova u uzorku od 60; $X \in =\{0,1,2,3...60\}$

n- broj elemenata =60 vjerovatnoća škarta u partiji 5% ***n→∞*** i ***p→0***

*praktično se Puasonova raspodjela može koristiti za n≥50, i p≤0,1*

$X \sim Po(\lambda)$, $\lambda = n \cdot p = 60 * 0,05 = 3$

**pretpostavljamo da se radi o Puasonovoj raspodjeli:**

$$P_\lambda(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

Vjerovatnoća da se u uzorku ne nadje ni jedan škart je p(X=0)

$$P_\lambda(0) = \frac{\lambda^0 \cdot e^{-\lambda}}{0!} = \frac{1 \cdot e^{-3}}{1} = \frac{1}{e^3} = 0,04979$$

**Zadatak 5**
Proizvodi jedne velike serije, koja sadrži 0,7% škarta, pakuju se u kutije od 100 komada. a) Koliki će procenat kutija biti bez ijednog škarata; b) koliki će procenat kutija biti sa dva ili više škartova?.

**RJEŠENJE**

X- slučajna promjenljiva= broj škartova u uzorku od 100; Xϵ={0,1,2,3...100}

n- broj elemenata =100 vjerovatnoća škarta u partiji 0,7% ***n→∞*** i ***p→0***

*praktično se Puasonova raspodjela može koristiti za n≥50, i p≤0,1*

X~Po(λ), λ=n·p=100*0,007=0,7

**pretpostavljamo da se radi o Puasonovoj raspodjeli:** $\boldsymbol{P_\lambda(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}}$

a) **Vjerovatnoća da se u uzorku ne nadje ni jedan škart je p(X=0)**

$$\boldsymbol{P_\lambda(0) = \frac{\lambda^0 \cdot e^{-\lambda}}{0!} = \frac{1 \cdot e^{-0,7}}{1} = \frac{1}{e^{0,7}} = 0,49659}$$

– **% kutija bez škarta:** $\boldsymbol{P_\lambda(0) \cdot 100\% = 49,65\%}$

b) **Vjerovatnoća da se u uzorku nadju 2 ili više škartova je p(X≥2)**

$$p(X \geq 2) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 1) - p(X = 1)$$

$\boldsymbol{P_\lambda(1) = \frac{\lambda^1 \cdot e^{-\lambda}}{1!} = \frac{0,7 \cdot e^{-0,7}}{1} = \frac{0,7}{e^{0,7}} = 0,3476}$ , ili se može koristiti rekurentni obrazac: $\boldsymbol{P_\lambda(x) = \frac{\lambda}{x} \cdot P_\lambda(x}$-1), pa je za X=1, P(x=1)=λ/1*P(X=0)

$$p(X \geq 2) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 1) - p(X = 1) = 1 - 0,49659 - 0,3476 = 0,1558$$

– **% kutija sa 2 ili više škarta:** $\boldsymbol{P_\lambda(X \geq 2) \cdot 100\% = 15,58\%}$